

Combinatoire des pavages dans le plan discret

Srečko Brlek *

1 Introduction

La combinatoire des mots, dont l'étude systématique fut initiée par Axel Thue au début du XXème siècle [4], puise ses origines dans des travaux antérieurs de Euler, Bernouilli, Markoff, Gauss, Poincaré et aussi Hadamard, pour ne nommer que quelques illustres mathématiciens. Le lecteur intéressé pourra consulter l'article de Berstel et Perrin sur l'historique de son développement [6].

La dynamique symbolique fondée par Morse et Hedlund [24] constitue une contribution majeure au domaine en introduisant les concepts de complexité en blocs (facteurs), de récurrence et l'étude des suites Sturmienne [25]. Le livre récent de N. Phyteas Fogg [18] donne un point de vue centré sur les systèmes dynamiques toute comme le livre de Marcus et Lind [23].

Le premier volume consacré à la combinatoire des mots a été celui publié par un collectif d'auteurs sous le nom de Maurice Lothaire [20]. Aujourd'hui ce domaine de recherche est très actif, comme le montrent les ouvrages récents de Lothaire sur les applications [21] et les aspects algébriques [22] de la combinatoire des mots. Une excellente introduction à l'étude des régularités et des mots sturmiens se trouve dans Berstel et al. [5].

La géométrie digitale est un domaine de recherche dont l'origine remonte aux années 1970 alors que se développaient les technologies numériques qui sont aujourd'hui omniprésentes dans toutes les sphères d'activités. En 2003, Klette et Rosenfeld mentionnent [19]

“Related work even earlier on the theory of words, specifically, on mechanical or Sturmian words, remained unnoticed in the pattern recognition community.”

En effet, bien que l'on sache depuis très longtemps (Bernouilli, 1772?) que les mots Sturmienne approximent les droites sur un réseau carré ce n'est qu'en 1965 que Bresenham décrit un algorithme pour le faire [9]. La géométrie discrète allait ensuite se développer vigoureusement. Il est important de souligner ici que les motifs tels que les répétitions de facteurs, les palindromes et leur variantes jouent un rôle important car ils décrivent la forme des contours. Cela donne encore plus d'importance à l'étude des motifs initiée par Morse et complétée par de nombreux auteurs. On pourra consulter les survols de Jean-Paul Allouche sur la complexité [1] et la complexité palindromique [2].

*Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique (LaCIM), Université du Québec à Montréal, Montréal (QC) CANADA H3C 3P8, brlek.srecko@uqam.ca

Le but de ce mini-cours est de faire une présentation détaillée de l'utilisation de la combinatoire des mots en géométrie digitale. Il s'adresse aux étudiants en master, aux doctorants et à tous ceux qui y trouveront un intérêt.

2 Programme sommaire

La terminologie de base suit Lothaire [20]. Le cours sera basé sur une série d'articles récents portant sur certains aspects de la combinatoire des mots et leur liens avec la géométrie digitale dont [3, 11, 13, 15, 12, 14, 16, 7, 8, 17] (liste non exhaustive). On parlera de :

- figures discrètes : codage de Freeman;
- la forme: symétries, convexité;
- palindromes et σ -palindromes;
- pavages du plan à la Escher: caractérisations, reconnaissance et génération de tuiles.

Bibliographie

- [1] J.-P. Allouche. Sur la complexité des suites infinies. *Bull. Belg. Math. Soc.*, 1:133–143, 1994.
- [2] Jean-Paul Allouche, Michael Baake, Julien Cassaigne, and David Damanik. Palindrome complexity. *Theoretical Computer Science*, 292(1):9–31, 2003.
- [3] Danièle Beauquier and Maurice Nivat. On translating one polyomino to tile the plane. *Discrete Computational Geometry*, 6:575–592, 1991.
- [4] Jean Berstel. *Axel Thue's papers on repetitions in words: a translation*, volume 20 of *Publications du LaCIM*. LaCIM, 1995.
- [5] Jean Berstel, Aaron Lauve, Christophe Reutenauer, and Franco V. Saliola. *Combinatorics on words*, volume 27 of *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, 2009.
- [6] Jean Berstel and Dominique Perrin. The origins of combinatorics on words. *European Journal of Combinatorics*, 28(3):996–1022, 2007.
- [7] Alexandre Blondin Massé, Srečko Brlek, Ariane Garon, and Sébastien Labbé. Equations on palindromes and circular words. *Theoretical Computer Science*, 412(27):2922–2930, 2011.
- [8] Alexandre Blondin Massé, Ariane Garon, and Sébastien Labbé. Combinatorial properties of double square tiles. *Theoretical Computer Science*, 502:98–117, 2013.
- [9] J. E. Bresenham. Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Systems Journal*, 4:25–30, 1965.

- [10] Srečko Brlek, Sylvie Hamel, Maurice Nivat, and Christophe Reutenauer. On the palindromic complexity of infinite words. *International Journal on Foundation of Computer Science*, 15(2):293–306, 2004.
- [11] Srečko Brlek, Michel Koskas, and Xavier Provençal. A linear time and space algorithm for detecting path intersection in Z^d . *Theoretical Computer Science*, 412(36):4841–4850, 2011.
- [12] Srečko Brlek, Gilbert Labelle, and Annie Lacasse. A note on a result of Daurat and Nivat. In C. de Felice and A. Restivo, editors, *Proceedings DLT 2005, 9-th International Conference on Developments in Language Theory*, number 3572 in LNCS, pages 189–198, Palermo, Italia, 4–8 July 2005. Springer-Verlag.
- [13] Srečko Brlek, Jacques-Olivier Lachaud, Xavier Provençal, and Christophe Reutenauer. Lyndon+Christoffel = digitally convex. *Pattern Recognition*, 42:2239–2246, 2009.
- [14] Srečko Brlek and Xavier Provençal. An optimal algorithm for detecting pseudo-squares. In Attila Kuba, László G. Nyúl, and Kálmán Palágyi, editors, *Discrete Geometry for Computer Imagery, 13th International Conference, DGCI 2006, Szeged, Hungary, October 25-27, 2006, Proceedings*, volume 4245 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 403–412. Springer, 2006.
- [15] Srečko Brlek, Xavier Provençal, and Jean-Marc Fédou. On the tiling by translation problem. *Discrete Applied Mathematics*, 157:464–475, 2009.
- [16] Srečko Brlek and Christophe Reutenauer. Complexity and palindromic defect of infinite words. *Theoretical Computer Science*, 412(4-5):493–497, 2011.
- [17] N. Pytheas Fogg. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, volume 1794 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 2002. (V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit, A. Siegel, editors).
- [18] Reinhard Klette and Azriel Rosenfeld. Digital straightness – a review. *Discrete Applied Mathematics*, 139(1-3):197 – 230, 2004.
- [19] M. Lothaire. *Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [20] M. Lothaire. *Algebraic Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [21] M. Lothaire. *Applied Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [22] B. Marcus and D. Lind. *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [23] Marsten Morse and Gustav A. Hedlund. Symbolic dynamics. *American Journal of Mathematics*, 60:815–866, 1938.
- [24] Marsten Morse and Gustav A. Hedlund. Symbolic dynamics ii: Sturmian sequences. *American Journal of Mathematics*, 62:1–42, 1940.